**HỌC PHẦN TOÁN RỜI RẠC**

**Phần 4: NHẬP MÔN LOGIC TOÁN**

Chương 8. HÀM ĐẠI SỐ LOGIC

## **8.1. HÀM ĐẠI SỐ LOGIC**

**Biến lô gic:** Trong giải tích, ta thường làm việc với các biến số thực (đó là các biến số lấy các giá trị trên trục số thực – tập R) hoặc các biến số phức – tập Z v..v..

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một lớp biến số chỉ lấy giá trị trong tập {0;1} – đó là các biến logic.

*Định nghĩa: x gọi là một biến số logic nếu x chỉ có thể nhận 1 trong 2 giá trị:*

* x = 0 : Giá trị SAI hay giá trị **phi lý**
* x = 1 : Giá trị ĐÚNG hay giá trị **chân lý.**
* *Tập giá trị của biến logic là : E = {0,1}*

**Định nghĩa hàm đại số logic:**

Cho *Hàm đại số lô gic 1 biến y = f(x) là một ánh xạ từ E vào chính nó.*

*Ánh xạ  gọi là một hàm đại số logic của n biến: y = f(x1, x2, … xn)* .

Ứng với một bộ giá trị của x1, x2, … xn , các xi đều lấy giá trị trong E, ta có một giá trị của y cũng lấy trong E.Một hàm đại số được mô tả cụ thể bởi ***bảng giá trị*** của nó; trong đó liệt kê mọi bộ giá trị có thể có của các biến cùng giá trị tương ứng của f.

*Thí dụ.* Chẳng hạn cho một hàm 3 biến *f(x,y,z)* có bảng giá trị:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | z |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Với hàm n biến: *f(x1, x2, …, xn)*  vi  nên  nên ta có  bộ trị số khác nhau của n biến, các giá trị của hàm *f* chỉ có thể là 0 hoặc1, do đó số các hàm đại số logic khác nhau của n biến là *Chỉnh hợp lặp chập 2n* của 2 giá trị {0,1}, tức là có tất cả **hàm khác nhau**. Chẳng hạn với  thì có 23 = 8 bộ giá trị khác nhau của 2 biến và do đó có  hàm đại số logic khác nhau của 3 biến.

Với n = 1, có 21 = 2 hàm:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | f1 | f2 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

f1(x) = x : ***Hàm đồng nhất***; f2(x) = ͞x : ***Hàm phủ định***

Với  ta có 24 = 16 hàm f(x,y) sau đây:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | f0 | f1 | f2 f3 f4 f5 f6 | f7 f8 f9 f10 | f11 | f12 f13 | f14 | f15 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 0 0 0 0 | 0 1 1 1 | 1 | 1 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 0 1 1 1 | 1 0 0 0 | 0 | 1 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 1 0 0 1 | 1 0 0 1 | 1 | 0 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 1 0 1 0 | 1 0 1 0 | 1 | 0 1 | 0 | 1 |

Trong đó có những hàm thường dùng được gọi tên:

f0 = 0 là hàm ***Hằng sai***; f15 = 1 là hàm ***Hằng đúng***.

f7 = x v y ***Tuyển*** của x và y (Hoặc – OR)

có “cột giá trị” là: [0,1,1,1]

f1 = x ^ y ***Hội*** của x và y (Và – AND)

cột giá trị là [0,0,0,1]

f6 = xΘy hay x XOR y gọi là ***Tuyển NGẶT*** của x và y - Strictly OR – ***XOR***

cột giá trị: [0,1,1,0]

f13 = x → y hay x => y Gọi là ***hàm kéo theo*** (x kéo theo y)

cột giá trị : [1,1,0,1]

f9 = x ↔ y hay x ≡ y Gọi là hàm ***tương đương*** (x và y tương đương)

cột giá trị: [1,0,0,1]

f8 = x ↓ y Gọi là hàm ***Vebb*** của x và y 

cột giá trị: [1,0,0,0]

f14 = x ∕ y Gọi là hàm ***Sheffer*** của x và y 

cột giá trị [1,1,1,0]

Trong các hàm trên, **hàm tuyển và hàm hội cùng với phép toán phủ định** trong lớp hàm đại số lô gic có vai trò đặc biệt quan trọng.*(Nhớ: Cột giá trị - Ý nghĩa)*

* *Trong tập hợp các hàm đại số logic, 3 hàm TUYỂN, HỘI và PHỦ ĐỊNH có các tính chất sau – có thể dễ dàng kiểm tra bằng cách lập các bảng giá trị):*
* 1. Tuyển có tính giao hoán X v Y = Y v X

Hội có tính giao hoán X ^ Y = Y ^ X

* 2. Tuyển có tính kết hợp (XvY) v Z = X v (Y v Z) = XvYvZ

Hội có tính kết hợp (X ^ Y) ^ Z = X ^ (Y^Z) = X^Y^Z

3. Tuyến phân phối đối với hội (XvY)^Z = (X^Z) v (Y^Z)

Hội phân phối đối với tuyển (X^Y) v Z = ( XvZ)^(YvZ)

4. Các qui tắc De Morgan

X v Y = X ^ Y

X^Y = X v Y

5. Qui tắc lũy đẳng:

X v 1 = 1; X ^ 1 = X

6. Qui tắc lũy linh:

X v 0 = X; X ^ 0 = 0

7. Phủ định của phủ định : ͞X = X

8. Tính bù: X v ͞X = 1

9. Tính phi mâu thuẫn: X ^ ͞X= 0

*Tập hợp các hàm logic đại số cùng với 3 phép Tuyển, Hội và Phủ định cũng tạo thành một* ***dàn Boole đại số.***

Với mỗi một biểu thức logic, ta lập được bảng giá trị của nó ứng với các bộ giá trị của các biến. Hai hàm đại số logic gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng giá trị với mọi bộ giá trị của các biến, vì vậy chúng có cùng một bảng giá trị như nhau.

Nói tóm lại mỗi một biểu thức logic tương ứng với một hàm đại số logic và một bảng giá trị, ngược lại mỗi bảng giá trị cũng biểu thị một hàm đại số logic có thể cho bởi một biểu thức logic.

Bằng các phép thay thế logic, ta có thể thấy rằng một hàm đại số logic có thể cho bởi nhiều biểu thức logic có dạng khác nhau (nhưng có cùng bảng giá trị như nhau). Vì vậy ta quan tâm đến những dạng nào có ít phép toán nhất.

## **8.2. DẠNG CHUẨN TẮC CỦA HÀM ĐẠI SỐ LOGIC**

***a) Tuyển sơ cấp***

Tuyển sơ cấp của các biến logic là một tuyển trong đó mỗi biến hoặc phủ định của nó chỉ xuất hiện tối đa 1 lần. Giả sử có 3 biến logic x, y, z thì các tuyển sau đây là tuyển sơ cấp:

; ; ; , …

Các tuyển có đủ cả 3 biến ta gọi là tuyển sơ cấp cực đại; chẳng hạn đối với các hàm 3 biến *f(x,y,z)* thì  không phải là tuyển cực đại.

***Chú ý.***

* Trong một tuyển sơ cấp, mỗi biến logic hoặc phủ định của nó chỉ xuất hiện tối đa 1 lần. Nếu xuất hiện nhiều lần chẳng hạn:  thì do tính chất giao hoán và kết hợp của phép tuyển ta có thể viết:

.

Điều đó cho phép ta loại trừ biến x ở phía sau mà không ảnh hưởng gì đến giá trị của biểu thức , nói cách khác tuyển sơ cấp  là một dạng chứa ít phép toán nhất.

* Mỗi biến và phủ định của nó chỉ được phép xuất hiện một trong hai, vì nếu cả hai đều xuất hiện, chẳng hạn:



thì ta có thể viết:



thì đó là một hằng đúng, khi đó mọi phép tính khác đều là thừa.

***b) Hội sơ cấp***

Hội sơ cấp của các biến logic là một hội, trong đó mỗi biến hoặc phủ định của nó chỉ xuất hiện tối đa 1 lần.

*Thí dụ.*

 ; ; ; ,…

Nếu hội có đủ các biến, ta gọi đó là hội cực đại. Tương tự với tuyển sơ cấp, ta thấy hội sơ cấp là dạng chứa ít phép toán nhất.

***c) Tuyển chuẩn tắc***

Tuyển chuẩn tắc là ***tuyển của các hội sơ cấp*** khác nhau.

*Thí dụ.*

1) 

2) 

Nếu tất cả các hội sơ cấp đều là cực đại thì tuyển chuẩn tắc gọi là ***đầy đủ***; trong thí dụ trên thì 1) là tuyển chuẩn tắc đầy đủ; còn 2) là không đầy đủ.

Dễ thấy rằng tuyển chuẩn tắc cũng là dạng chứa ít phép toán nhất trong các dạng tuyển biểu diễn hàm .

***d) Hội chuẩn tắc***

Hội chuẩn tắc là ***hội của các tuyển sơ cấp khác nhau***. Nếu tất cả các tuyển sơ cấp đều là cực đại thì hội chuẩn tắc là ***đầy đủ***

*Thí dụ.* 

là hội chuẩn tắc đầy đủ.

## **8.3. TÌM DẠNG CHUẨN TẮC CỦA CÁC HÀM ĐẠI SỐ LOGIC**

***a) Dạng TUYỂN chuẩn tắc.***Ta thừa nhận – không CM – định lý quan trọng sau đây.

**ĐỊNH LÝ KHAI TRIỂN I -**

***Cho hàm đại số logic n biến dạng: f(x1, x2, ..., xn). Với mỗi bộ giá trị của xi làm cho f có giá trị bằng 1 ta lập một hội sơ cấp của các biến xi : nếu trong bộ giá trị nói trên, xi = 1 thì trong hội sơ cấp ta lấy xi, còn nếu xi = 0 thì ta lấy x¯i .***

***Giá trị của hàm f đúng bằng TUYỂN CỦA CÁC HỘI SƠ CẤP đó.***

***Biểu thức đó được gọi là khai triển dạng TUYỂN chuẩn tắc của hàm f.***

* *Có thể kiểm tra: Với mỗi bộ giá trị của các biến làm cho hàm f = 1 thì trong TUYỂN được lập thành có một hội sơ cấp lấy giá trị 1, còn với 1 bộ biến làm cho f = 0 thì trong tuyển được lập thành các hội sơ cấp đều có giá trị 0.*

Để khai triển một hàm logic đại số thành dạng tuyển chính tắc, ta tiến hành theo trình tự sau đây:

- Lập bảng giá trị của hàm đại số logic.

- Tìm các hội sơ cấp.

- Lập tuyển của các hội sơ cấp đó.

*Thí dụ.*Tìm dạng tuyển chuẩn tắc của hàm đại số logic cho bởi biểu thức logic sau:



- Trước tiên ta lập bảng giá trị của :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | y | z |  |  |  | Hội sơ cấp |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |  |

- Tìm các hội sơ cấp.

Ta quan tâm đến các giá trị 1 của . Trong bảng có 5 số 1, tương ứng với 5 hội sơ cấp khác nhau: .

Hội của các mệnh đề có giá trị 1 khi mọi mệnh đề có giá trị 1 nên ta có:











- Vậy dạng tuyển chuẩn tắc của  là:





***b) Dạng HỘI chuẩn tắc.***Ta cũng thừa nhận – không CM – định lý sau đây.

**ĐỊNH LÝ KHAI TRIỂN II -**

***Cho hàm đại số logic n biến dạng: f(x1, x2, ..., xn). Với mỗi bộ giá trị của xi làm cho f có giá trị bằng 0 ta lập một tuyển sơ cấp của các biến xi : nếu trong bộ giá trị nói trên, xi = 0 thì trong tuyển sơ cấp ta lấy xi , còn nếu xi = 1 thì ta lấy x¯i . Giá trị của hàm f đúng bằng HỘI CỦA CÁC TUYỂN SƠ CẤP đó. Biểu thức đó được gọi là khai triển dạng HỘI chuẩn tắc của hàm f.***

Tiến hành theo trình tự như khi tìm dạng tuyển chuẩn tắc, chỉ có điều khác là sau khi lập bảng giá trị của hàm , thay cho việc tìm hội sơ cấp, chúng ta tìm tuyển sơ cấp.

Khi tìm tuyển sơ cấp ta xét các bộ giá trị của biến làm cho F = 0. Trong bảng giá trị của hàm  có 3 số 0 tương ứng với các bộ trị số của x, y, z như sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  |

Ta biết rằng tuyển của các mệnh đề có giá trị 0 khi mọi mệnh đề lấy giá trị 0, nên ta dễ dàng tìm được:







và do đó dạng hội chuẩn tắc của  là

.

Ta cũng thấy rằng dạng tuyển chuẩn tắc và hội chuẩn tắc mà chúng ta vừa tìm được đều là dạng chuẩn tắc đầy đủ.

*Chú ý quan trọng.*  *Theo 2 định lý khai triển thì mỗi hàm F có thể được biểu diễn thàng 2 dạng khai triển chuẩn tắc khác nhau. Trong thực hành, khi F lấy ít giá trị 1 thì ta nên dùng khai triển tuyển chuẩn tắc (số HỘI sơ cấp sử dụng sẽ ít), ngược lại nếu F lấy ít giá trị 0 thì nên dùng khai triển Hội chuẩn tắc.*

## **8.4. BIỂU DIỄN CÁC HÀM ĐẠI SỐ LOGIC BỞI 2 PHÉP TOÁN**

Trong biểu diễn dạng chuẩn tắc của một hàm đại số logic cho dù có bao nhiêu biến cũng chỉ có 3 phép tính: tuyển, hội và phủ định: Chỉ cần 3 pháp toán là đủ biểu diễn mọi hàm đại số lô gic. Ta tìm cách biểu diễn một hàm đại số logic chỉ bằng 2 phép tính: hoặc là tuyển và phủ định hoặc là hội và phủ định.

1. ***Chỉ có dấu tuyển và phủ định***

Muốn vậy ta phải làm mất các dấu hội chứa trong biểu thức của ; ta chỉ việc áp dụng luật phủ định của phủ định và luật DeMorgan.

 và 

*Thí dụ 1.* 





*Thí dụ 2.* 





***b) Chỉ có dấu hội và phủ định***

Ta sẽ làm mất dấu tuyển bằng cách áp dụng 2 công thức:

 và 

*Thí dụ 3.* 





*Thí dụ 4.* 





## **8,5. Hệ hàm đủ.** Ta gọi một hệ hàm lô gic {f1, f2, …} là một **hệ hàm đủ,** nếu như mọi hàm đại số lô gic bất kỳ đều có thể biểu diễn thông qua sự kết hợp của các hàm trong hệ đó.

## Do các công thức khai triển các dạng hội chính tắc và tuyển chính tắc ta thấy ngay răng hệ gồm 3 hàm: {*Tuyển, Hội, Phủ định} là một hệ hàm đủ.*

## Do kết quả ở mục 8,4 ta cũng thấy rằng các hệ chỉ gồm 2 hàm

## *{Tuyển, Phủ định} hoặc {Hội, Phủ định} cũng là một hệ đủ.*

## Có thể kiểm tra hàm ***Sheffer:***

## 

## hoặc hàm ***Vebb*** :

## 

## Bản thân mỗi hàm này cũng đã là một hệ hàm đủ.

## Thật vậy, dễ dàng thấy ngay rằng từ hàm Shefffer hay hàm Vebb ta có thể tạo ra hàm Hội và hàm Phủ định hoặc hàm Tuyển và hàm Phủ định, từ đó có thể tạo ra mọi hàm đại số lô gic khác.

## Một hệ hàm đủ tối thiểu – nghĩa là nếu loại bớt bất kỳ một hàm nào trong hệ thì hệ đó mất tính đủ - được gọi là một **hệ hàm cơ sở.**

## Hệ đủ: {Tuyển, Hội, Phủ định} chưa phải là một hệ cơ sở.

## Các hệ đủ {Tuyển, Phủ định} hoặc {Hội, Phủ định} đều là hệ cơ sở

## Hệ chỉ gồm duy nhất hàm Sheffer hoặc hàm Vebb cũng là hệ cơ sở.*(singleton)*

## **Rút gọn biểu thức của một hàm lô gic.**

## Theo các đinh lý khái niệm dạng chính tắc, khi “cho biết” một hàm đại số lô gic bất kỳ - nghĩa là cho biết bảng giá trị của nó – ta có thể viết biểu thức của hàm đó thành dạng một hàm hợp gồm các hàm tuyển, hội và phủ định. Trong trường hợp tổng quát, biểu thức của hàm có thể rất phức tạp với sự xuất hiện nhiều lần của các biến hợp thành.

## Việc biến đổi một biểu thức phức tạp, chứa số lần xuất hiện các biến số nhiều hơn ¯thành một biểu thức có bảng giá trị hoàn toàn tương đương nhưng đơn giản hơn – nghĩa là số lần xuất hiện của các biến số trong biểu thức ít hơn – được gọi là **rút gọn biểu thức của hàm đại số lô gic đã cho.**

## Trong thực tế, người ta có thể dùng các công thức biến đổi sau đây để thực hiện các phép biến đổi rút gọn biểu thức của một làm đại số lô gic.

## ***Qui tắc dán:*** xy V xy¯ = x[yVy¯] = x.1 = x

## ***Qui tắc nuốt:*** xyVx = x[yV1] = x. 1 = x

-  ***Qui tắc lặp:***  ͞xyz v ͞xyz = ͞xyz (*thêm số hạng để thực hiện dán, nuốt)*

## **8.5. CỔNG LOGIC VÀ TỔNG HỢP CÁC MẠCH LOGIC**

Có thể sử dụng các phép toán mệnh đề và hàm đại số logic để mô hình hóa các mạch trong các thiết bị điện tử nói chung và trong máy tính nói riêng. Mỗi máy tính có nhiều mạch, mỗi mạch có thể mô hình hóa bởi các quy tắc của các phép toán mệnh đề. Các phần tử cơ bản của một mạch gọi là một cổng, mỗi cổng thực hiện một phép toán mệnh đề. Có 3 loại cổng tương ứng với 3 phép toán mệnh đề. Các cổng mà ta nghiên cứu ở đây chỉ phụ thuộc đầu vào tức thời mà không phụ thuộc vào trạng thái của mạch; đó là những mạch không có khả năng nhớ, những mạch như vậy gọi là các mạch tổ hợp.

**8.5.1. Cổng NOT.** Cổng NOT mô tả hoạt động cảu thiết bị tương ứng với phép toán phủ định, nếu đầu vào là x thì đầu ra là , như một bộ đảo mạch trong các thiết bị điện tử (*triod)* hay một cong tắc trong mạch điện.

Cổng NOT được mô tả bởi hình dưới đây:



NOT

x ͞x

NOT

**8.5.2. Cổng AND.** Cổng AND mô tả thiết bị điện/ điện tử thực hiện phép hội, đầu vào có thể nhận nhiều biến, đầu ra là hội của các biến đó (*mạch nối tiếp),* được mô tả bởi hình trên đây:

Cổng AND tương ứng với mạch điện nối tiếp:

x y z x v y v z

AND AND AND

**8.5.3. Cổng OR.** Cổng OR mô tả thiết bị điện/ điện tử thực hiện phép tuyển, đầu vào có thể nhận nhiều biến, đầu ra là tuyển của các biến đó *(mạch song song)*. Cổng OR được mô tả bởi hình dưới đây



Cổng OR ứng với mạch điện song song: OR x

ORy

**8.5.4. Thiết kế mạch logic thực hiện một hàm đại số logic cho trước**

Việc thiết kế một mạch lô gic thực hiện một hàm đại số lô gic cho trước có vai trò quan trọng để định hướng cho thiết kế kỹ thuật cụ thể các thiết bị hoạt động thực hiện chức năng của hàm đại số lô gic đó. Qui trình thiết kế gồm những bước sau:

Bước 1: Cho một hàm đại số lô gic f (x1, x2, …., xn). Lập bảng giá trị của hàm f .

Bước 2: Từ bảng giá trị, lập biểu thức biểu diễn hàm f thông qua dạng chính tắc tuyển hay dạng chính tắc hội.

Bước 3: Rút gọn biểu thức đến mức đơn giản nhất có thể.

Bước 4: Trong biểu thức rút gọn này chỉ có 3 phép toán phủ định, tuyển và hội, các phép toán này tương ứng với các cổng NOT, OR và AND nên ta có thể sử dụng các cổng này để thiết kế một mạch logic thực hiện hàm đại số logic đã cho.

*Thí dụ.* 

OR

AND

AND

AND

F(x, y, z)

z

x

z

z

y

x

x

yx

y

## **BÀI TẬP CHƯƠNG 8**

**8.1.** Lập bảng giá trị của các hàm đại số logic dưới đây:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

**8.2.** Cho hàm đại số logic  lấy giá trị 1 khi và chỉ khi có ít nhất 2 biến lấy giá trị 1.

a) Lập bảng giá trị của 

b) Tìm dạng tuyển chuẩn tắc của  và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu tuyển và phủ định.

c) Tìm dạng hội chuẩn tắc của  và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu hội và phủ định.

d) Thiết kế mạch logic với các cổng NOT, AND và OR để thực hiện dạng tuyển chuẩn tắc của .

**8.3.** Cho  là hàm đại số logic thỏa điều kiện:

, khi và chỉ khi 

Và hàm hợp 

a) Lập bảng giá trị của 

c) Thiết kế mạch logic với các cổng NOT, AND và OR để thực hiện hàm đã cho.

**GIẢI BÀI KIỂM TRA ĐIỀU KIỆN SỐ 2**

***Câu 1.****Chứng minh rằng trong số  số nguyên dương khác nhau, có ít nhất 2 số mà hiệu của chúng chia hết cho n.*

**Giải:** Chia một số nguyên bất kỳ cho n thì số dư của nó có thể lấy giá trị từ {0, 1, …, n-1}; tức là nó có n số dư khác nhau *( n chuồng)*. Lấy  số nguyên khác nhau *( n+1 chim bồ câu)*, ắt phải có ít nhất 2 số đồng dư (có cùng số dư). Vậy hiệu của 2 số này chia hết cho n. **Điều phải chứng minh**.

* *Nhận xét mở rộng:*

Định lý Dirichlet là phương pháp hữu hiệu để giải bài toán TỒN TẠI trong trường hợp khá phức tạp. Trong trường hợp đơn giản hơn, thường có thể dùng *phương pháp liêt kê.* Chẳng hạn xét bài toán sau đây:

1. *Chứng minh rằng trong 3 số nguyên bất kỳ, có ít nhất 2 số mà hiệu của chúng là số chẵn.*

Đây chính là bài toán trên với n = 2, có thể giải bằng định lý Dirichlet như trên nhưng cũng có thể giải như sau.

Lấy 3 số nguyên bất kỳ, ta có thể và chỉ có thể có các trường hợp sau đây xảy ra:

a/ 3 số đều lẻ ; Hiệu của bất cứ 2 số lẻ nào trong đó là 1 số chẵn

b/ 2 lẻ, 1 chẵn: Hiệu của 2 số lẻ là số chẵn

c/ 1 lẻ, 2 chẵn: Hiệu của 2 số chẵn là số chẵn

d/ 3 số đều chẵn: Hiệu của bất cứ 2 số nào trong đó cũng là chẵn.

1. *Trong mặt phẳng tọa độ, lấy 5 điểm Mi(xi,yi) có các tọa độ đều là số nguyên. Chứng minh rằng ít nhất có 1 đoạn thẳng nối 2 trong 5 điểm ấy có tọa đọ nguyên.*

Ở đây có 5 điểm, được nhốt trong 4 chuồng : (lẻ,lẻ), (lẻ,chẵn), chẵn,lẻ), (chẵn,chẵn) vậy ít nhất có 2 điểm trong 1 chuồng: trung điểm của đoạn nói 2 điểm cùng chuồng ấy có tọa độ nguyên.

***Câu 2.*** *Cho  là một đồ thị vô hướng, đủ và có 8 đỉnh.*

*a) Có bao nhiêu cây bao trùm?*

*b) Có bao nhiêu cây bao trùm có 1 đỉnh bậc 4(\*)*

**Giải:** a) Số đỉnh là n = 8 thì theo định lý Keller, số cây bao trùm là :

**T8 = 86**

1. Số cây bao trùm có 1 đỉnh bậc 4.

*Đây là một bài toán ĐẾM. Giải bằng phương pháp LIỆT KÊ mọi trường hợp có thể xảy ra – không sót, không trùng.*

Chọn 1 trong 8 đỉnh gọi là đỉnh X1 làm đỉnh có bậc 4, có: **8 cách** chọn.

- Sau khi có X1, chọn tiếp 4 trong 7 đỉnh còn lại nối với nó, gọi là X2, X3, X4, X5. Có: **C74 = 35 cách.** Vậy có tất cả 8 x 35 **= 280 cây 5 đỉnh** như vậy.

- Với mỗi cây như thế, cần nối với 3 đỉnh còn lại gọi là X6, X7, X8, thành 1 cây bao trùm 8 đỉnh, chỉ có X1 là đỉnh bậc 4.

Chỉ có thể xảy ra các trường hợp:

X1 X1 X1 X1

X2 X3 X4 X5 X2 X3 X4 X5 X2 X3 X4 X5 X2 X3 X4 X5

X6 X7 X8 X6 X7 X8 X6 X7 X8 X6 X7 X8

***Hình 1 Hình 2 Hình 3A Hình 3B***

X1

X2 X3 X4 X5

X6

X7

X8

Trường hợp 1: Mỗi đỉnh trong 3 đỉnh X6, X7, X8 nối với 1 trong các đỉnh X2, X3, X4 X5 : có A43 = có **24 cách**. (H1).

Trường hợp 2: Một trong số 4 đỉnh X2, X3, X4, X5 – *4 cách*– nối với 2 trong 3 đỉnh X6, X7, X8 – *3* *cách –* và 1 trong 3 đỉnh còn lại của X2, X3, X4, X5 - *3 cách –* thì nối với đỉnh thứ ba còn lại trong 3 đỉnh X6, X7, X8 sẽ tạo ra :

4 x 3 x 3 = **36 cách** khác nhau ( H2)

Trường hợp 3: Mỗi 1 trong 4 đỉnh X2, X3, X4, X5 – *4 cách* - lần lượt cùng với cả 3 đỉnh X6, X7, X8 tạo nên *42 = 16* cây bao trùm ( H3A), trong đó loại bỏ 1 cây có đỉnh bậc 4 (H3B) còn *15 cây*; vậy tất cả có : 15x4 = **60 cách.**

Trường hợp 4 : Mỗi 1 trong 4 đỉnh – *4 cách –* lần lượt nối với 1 trong 3 đỉnh – *3 cách -*  mỗi đỉnh đó nối tiếp với lần lượt 2 đỉnh còn lại : - *2 cách.*  Tất cả sẽ tạo ra thêm : 4x3x2 = **24 cách**

Tổng cộng có :

N = 280.(24 + 36 + 60 + 24 ) = **51.520 cây bao trùm có 1 đỉnh bậc 4.**

***Câu 3.*** *Tìm cây bao trùm ngắn nhất cho đồ thị dưới đây:*





**Giải :** Dùng thuật toán Prim, bắt đầu từ cạnh ngắn nhất. Ma trận trọng số (Chỉ xét phần trên đường chéo chính)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | X7 |
| X1 | 0 | 3\* | ∞ | ∞ | ∞ | 7/ | 5/ |
| X2 | 3/ | 0 | 5/ | ∞ | ∞ | 6/ | 3\* |
| X3 | ∞ | 5 | 0 | 7/ | 8/ | ∞ | 4\* |
| X4 | ∞ | ∞ | 7 | 0 | 6\* | ∞ | ∞ |
| X5 | ∞ | ∞ | 8 | 6/ | 0 | 4\* | 3\* |
| X6 | 7 | 6 | ∞ | ∞ | 4/ | 0 | 8 |
| X7 | 5/ | 3/ | 4/ | ∞ | 3/ | 8 | 0 |

Đồ thị có 7 đỉnh nên cây bao trùm phải có 6 cạnh.

Lần lượt chọn các cạnh theo từng bước:

* Bước 1: chọn số bé nhất trong ma trận, ở đây có thể chọn 3\* ứng với (X1,X2), (X2, X7) hoặc ( X5, X7). Giả sử ta chọn cạnh sử dụng thứ nhất là (X2,X7), đánh dấu sao.
* Bước 2: chọn số bé nhất còn lại trong cột 2 và cột 7, có sô 3\* ứng với cạnh (X5,X7). Cạnh sử dụng thứ hai được chọn là (X5,X7). Loại (X2,X5)
* Bước 3: Duyệt tìm số bé nhât còn lại ở 3 cột 2, 5, 7, có số 3\* ứng với (X1,X2) không thành chu trình
* Bước 4: Duyệt cột 1,2,5,7, có số bé nhất còn lại là 4\* ứng với cạnh (X3,X7) không thành chu trình.
* Bước 5: Duyệt các hàng 1, 2, 3, 5,7, có số bé nhất còn lại là 4\* ứng với cạnh (X5,X6)
* Bước 6: Duyệt các hàng 1,2,3,5,6,7, số bé nhất còn lại: 6\* ứng với (X5,X4) – đủ 6 cạnh sử dụng, quá trình kết thúc.

Ta có một cây bao trùm bé nhất là :

**T = (X1,X2)(X2,X7)(X5,X7)(X3,X7)(X5,X6)(X5,X4)**

Có độ dài ***l(*T*)*  = 3 +3 + 3 + 4 + 4 + 6 = 23**



*Chú ý:*Nếu dung phương pháp đối ngẫu: loại bỏ từ cạnh dài mất sao cho không mất tính liên thông thì khi n khá lớn, số cạnh phải loại đi nhiếu hơn số n – 1 cạnh phải chọn trong phương pháp ở thuật toán Kruskal. Tuy nhiên, trên ma trận, việc xem xét tính mất liên thông dễ dàng hơn nhiều so với việc xem xét tính tạo chu trình giữa các cạnh đã chọn: Để không mất tính liên thông thì không thể xóa hết mọi ô sử dụng trong 1 hàng hay 1 cột của ma trận vì nếu vậy thì sẽ có 1 đỉnh cô lập.

--o—0--o—

**BÀI TẬP LOGIC ĐẠI SỐ**

a)Thiết kế mạch logic gồm 3 cổng NOT, AND, OR thực hiện một hàm 3 biến *f(x,y,z)* có bảng giá trị sau.

b) Thiết kế mạch logic chỉ gồm cổng NOT và AND thực hiện hàm đó.

*Giải:* a)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | Hội SC Tuyển SC |
| 0 | 0 | 0 | 0 x v y v z |
| 0 | 0 | 1 | 1 ͞x ͞y z |
| 0 | 1 | 0 | 1 ͞x y ͞z |
| 0 | 1 | 1 | 0 x v ͞y v ͞z |
| 1 | 0 | 0 | 0 ͞x v y v z |
| 1 | 0 | 1 | 1 x ͞y z |
| 1 | 1 | 0 | 1 x y ͞z |
| 1 | 1 | 1 | 0 ͞x v ͞y v ͞z |

Khai triển dạng chuẩn tắc tuyển:

 = ͞x ͞y z V ͞x y ͞z V x ͞y z V x y ͞z

Rút gọn:  = ͞y z V y ͞z (\*)

Khai triển dạng chính tắc hội:

 = (x v y v z)( x v ͞y v ͞z )( ͞x v y v z)( ͞x v ͞y v ͞z)

Rút gọn:  = y ͞z V ͞y z (\*)

\**Dùng dạng chuẩn tắc tuyển thì việc rút gọn thường dế dàng hơn nhiều do áp dụng các qui tắc: Dán, Nuốt, Lặp*

Thiết kế mạch logic thực hiện hàm f – không phụ thuộc x:

Y

͞y ͞y z

z

f(x,y,z)

y y ͞z

͞z

Z

b) Biến đổi hàm (\*) thành dạng chỉ còn hai hàm PHỦ ĐỊNH và HỘI: Dùng qui tắc De Morgan:

f(x,y,z) = ͞y z V y ͞z = ͞y z V y ͞z = (͞y z) ^ (y ͞z) ( 5 cổng NOT và 3 cổng AND)

y

z

f(x,y,z) = ͞y z V y ͞z

y

z

1. Biến ͞yz thành dạng tuyển và phủ định: ͞yz = ͞yz = y V ͞z

## BÀI TẬP CHƯƠNG 8

**8.1.** Lập bảng giá trị của các hàm đại số logic dưới đây:

a) 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | ͞z | xv y | yv ͞z | f |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Khai triển dạng chính tắc Hội , chỉ có 1 tuyển chuẩn tắc :

*f(x,y,z) =*  ͞x V y V ͞z

A picture containing icon

Description automatically generated

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

**8.2.** Cho hàm đại số logic  lấy giá trị 1 khi và chỉ khi có ít nhất 2 biến lấy giá trị 1.

a) Lập bảng giá trị của 

b) Tìm dạng tuyển chuẩn tắc của  và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu tuyển và phủ định.

c) Tìm dạng hội chuẩn tắc của  và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu hội và phủ định.

d) Thiết kế mạch logic với các cổng NOT, AND và OR để thực hiện dạng tuyển chuẩn tắc của .

**8.3.** Cho  là hàm đại số logic thỏa điều kiện:

khi và chỉ khi 

Và hàm hợp 

a) Lập bảng giá trị của 

b) Tìm dạng tuyển chuẩn tắc và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu tuyển và phủ định

c) Thiết kế mạch logic với các cổng NOT, AND và OR để thực hiện hàm  đã cho.

Giải thích:

khi và chỉ khi tương đương với :

Φ(A, B) = A v ͞B

Mà A = x ^ ͞y còn B = y → z nên:

f(x,y,z) = (x ^ ͞y) v (y →z)

**BÀI THỰC HÀNH**

Hội đồng chấm thi một trò chơi trên truyền hình có 3 giám khảo x, y và z. Sau khi thí sinh trả lời một câu hỏi, mỗi giám khảo sẽ bấm nút cho điểm 1: ĐẠT hoặc 0: KHÔNG ĐẠT.

Thí sinh được giải nếu ít nhất 2 trong 3 giám khảo cho ĐẠT.

* 1) Lập hàm đại số logic thực hiện việc chấm thi sao cho sau khi 3 giám khảo bấm nút thì hiện ngay ra kết quả của thí sinh.
* 2) Thiết kế 1 mạng logic thực hiện việc chấm thi.
* *Giải:*

Gọi x, y, z lần lượt là phiếu thuận của 3 giám khảo, ͞x, ͞y, ͞z là phiếu chống. Lập hàm f(x,y,z) lấy giá trị 1 khi và chỉ khi có ít nhất 2 phiếu thuận.

Thông thường, lập bảng giá trị của f, viết biểu thức của f theo các định lý khai triển rồi rút gọn.

Trường hợp này ta có thể suy luận trực tiếp: Các trường hợp có ít nhất 1 trong 2 phiếu thuận là: ͞x y z, x͞yz,xy͞z, và xyz; vậy:

F(x,y,z) = ͞x y z Vx͞yz Vxy͞z Vxyz = xy V yz V zx

Mạng logic thực hiện:

x

y

y

z A picture containing icon

Description automatically generated f(x,y,z)

z

x

**ÔN TẬP CHƯƠNG 8**

1. Biến logic: x ϵ E ={0,1}
2. Hàm logic n biến : + Ánh xạ *f :* En → E; có 2(2\*n) hàm khác nhau

+ Bảng giá trị. (Nhớ: cột giá trị)

1. Các hàm logic 1 biến: ĐỒNG NHẤT: f(x) = x; PHỦ ĐỊNH: f(x) = ͞x
2. Có 22\*2 = 16 hàm 2 biến khác nhau, các hàm quan trọng: *Nhớ ý nghĩa và cột giá trị*

HỘI: x^y [0001] *Cả hai*

TUYỂN: x V y [0111] *Ít nhất một*

TƯƠNG ĐƯƠNG: x ≡ y [1001] *Cả 2 giống nhau*

KÉO THEO: x y [1101] *Đúng không kéo theo Sai*

XOR; x Θ y [0110] *Chỉ 1 trong 2*

SHEFFER: x ∕ y [1110] *Không thể cả 2*

WEBB: x ↆ y [1000] *Cả 2 Sai*

1. Khai triển TUYỂN chuẩn tắc:

* Tuyển của các HỘI sơ cấp
* Mỗi số 1 trong bảng giá trị lấy 1 hội sơ cấp; 1 thì lấy xi; 0 thì lấy ͞xi

1. Khai triển HỘI chuẩn tắc:

* Hội của các TUYỂN sơ cấp
* Mỗi số 0 trong bảng giá trị lấy 1 tuyển sơ cấp, 0 thì lấy xi, 1 thì lấy xi

1. Rút gọn biểu thức logic bằng các qui tắc:

* Dán: x y V x ͞y = x
* Nuốt: xyz V xy = xy
* Lặp: xyz V xyz = xyz
* Hệ hàm đủ: *Chứng minh hệ là đủ: - Do các định lý khai triển*

Tuyển , Hội, Phủ định

* Hệ hàm cơ sở = Đủ tối thiểu: *– Chứng minh từ các hàm trong hệ đủ tạo ra các hàm TUYỂN, HỘI, PHỦ ĐỊNH*

{Tuyển, Phủ định}; {Hội, Phủ định}; {Sheffer}; {Webb}

1. Thiết kế mạch logic:

* Cổng NOT : Phủ định; Cổng OR: Tuyển; Cổng AND: Hội